ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 8

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 8

Петар Р. Серафимов

СОСТОЈБАТА НА НАПРЕГАЊАТА ВО ХИПЕРБОЛИЧНИТЕ ЛУПШИ ПО ТЕОРИЈАТА НА МЕМБРАНАТА

Peter Serafimov

SPANNUNGSZUSTAND HYPERBOLISCHER SCHALEN NACH DER MEMBRANTHEORIE

Скопје — Skopje
1950

Za drugi zbir se dobija

$$0 \leqslant \sum_{m=0}^{s} (-1)^m \delta_m \leqslant \sum_{m=0}^{s} \delta_m < s+1.$$

Zamenjujući ove izraze u (15), imamo

$$K(x) = \frac{k - \left(-\frac{1}{k}\right)^{s+1}}{k+1} x + \theta (s+1), \qquad 0 \leqslant \theta < 1. \tag{16}$$

S obzirom na (14) dobija se

$$\theta \left(\left[\frac{\log x}{\log k} \right] + 1 \right) \sim \theta \frac{\log x}{\log k} = O(\log x), \qquad x \to \infty.$$

Pošto prema (14) $s \to \infty$ kada $x \to \infty$, iz (16) izlazi

$$K(x) = \frac{k}{k+1} x + O(\log x), \qquad x \to \infty,$$

što pretstavlja formulu (7). Na ovaj način je prva tačka teoreme dokazana u potpunosti. Napomenimo samo da iz (7) neposredno sleduje formula

$$K(x) \sim \frac{k}{k+1} x, \qquad x \to \infty,$$

koja izražava da brojevi niza (k) sačinjavaju $k/(k+1)$ deo brojeva prirodnog niza, ili da ja njihova asimptotska gustina $k/(k+1)$.

Ako je a_n n-ti član niza (k), onda je prema poslednjoj formuli

$$K(a_n) \sim \frac{k}{k+1} a_n, \qquad n \to \infty.$$

Međutim prema definiciji $K(x)$ sleduje $K(a_n) = n$. Iz poslednje dve relacije dobija se

$$a_n \sim \frac{k+1}{k} n, \qquad n \to \infty,$$

što pretstavlja formulu (8).

Najzad preći ćemo na dokaz poslednje tačke.

Stavimo $x=n$, gde je

$$n=c_0+kc_1+k^2c_2+\cdots+k^r c_r, \tag{17}$$

u formulu (6). Pre no što izvršimo smenu izračunajmo koliko je $\left[\frac{n}{k^m}\right]$. Dobija se

$$\frac{n}{k^m}=\frac{c_0}{k^m}+\frac{c_1}{k^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{k}+c_m+kc_{m+1}+\cdots+k^{r-m}c_r.$$

Kako je

$$\frac{c_0}{k^m}+\frac{c_1}{k^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{k}\leqq\frac{k-1}{k^m}+\frac{k-1}{k^{m-1}}+\cdots+\frac{k-1}{k}=1-\frac{1}{k^m}<1$$

(pošto c_l može biti samo jedan od brojeva $0, 1, 2, \ldots, k-1$), imamo

$$\left[\frac{n}{k^m}\right]=c_m+kc_{m+1}+\cdots+k^{r-m}c_r.$$

Stavljajući $m=0, 1, 2, \ldots, r$, dobija se iz (6):

$$\begin{aligned}
K(n)=c_0+kc_1+k^2c_2+\cdots+k^l c_l &+\cdots+k^r c_r - \\
-c_1-kc_2-\cdots-k^{l-1}c_l &-\cdots-k^{r-1}c_r+ \\
+c_2+\cdots+k^{l-2}c_l &+\cdots+k^{r-2}c_r- \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots \\
+(-1)^l c_l &+\cdots+(-1)^l k^{r-l}c_r+ \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(-1)^r c_r.
\end{aligned}$$

Kada se izvrši sabiranje sličnih sabiraka, koeficijenat člana koji sadrži c_l biće

$$k^l-k^{l-1}+k^{l-2}-\cdots+(-1)^l=\frac{k^{l+1}+(-1)^l}{k+1}=\frac{k\,k^l+(-1)^l}{k+1}.$$

Prema tome je

$$K(n)=\sum_{l=0}^{r}\frac{k\,k^l+(-1)^l}{k+1}\,c_l=\frac{k}{k+1}\sum_{l=0}^{r}k^l\,c_l+\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\,c_l\,.$$

Odavde, s obzirom na (17), sleduje

$$K(n)=\frac{k}{k+1}\,n+\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\,c_l\,,$$

što je i trebalo dokazati.

M. S. Popadić

GENERALISATION OF A PROBLEM OF J. KARAMATA ON A KIND OF SEQUENCES

(Summary)

A generalisation is given of the problem proposed by J. Karamata in the *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie* [I, 3—4 (1949), p. 155—156].

Definition of the sequence (k). k being a natural number, let us perform in the sequence of natural numbers the following permutation: we put after the first term, namely after 1, the k-times greater number, then the next remained term of the sequence and after this number again the k-times greater one and so on. So we obtain for $k=3$, for instance, the following sequence (k):

$$1,\ 3,\quad 2,\ 6,\quad 4,\ 12,\quad 5,\ 15,\quad 7,\ 21,\quad 8,\ 24,\ \ldots$$

In general we have

$$1,\ k,\quad 2k,\ \ldots,\ k-1,\quad (k-1)\,k,\quad k+1,\quad (k+1)\,k,\ \ldots$$

A sequence formed with all terms of odd rank of the last sequence, i. e.

$$1,\ 2.\ 3,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,$$

is called the sequence (k).

It is easy to prove the following two lemmas:

Lemma 1. *The general term of the sequence* (k) *is*

$$a=(kl-p)\,k^{2r}$$

where

$$l=1, 2, 3, \ldots ; \; p=1, 2, \ldots, k-1; \; r=0, 1, 2, \ldots$$

Lemma 2. *The numbers l, p, r, are uniquely determined for every term of the sequence* (k).

Let $K(x)$ denotes the number of all terms of the sequence (k) not exceeding x. Then the following theorem can be proved:

Theorem. 1. *For the number of terms of the sequence* (k) *we have:*

(1) $$K(x)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m=1}^{k-1}\left[\frac{m}{k}+\frac{x}{k^{2n+1}}\right],$$

(2) $$K(x)=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left[\frac{x}{k^m}\right],$$

(3) $$K(x)=\frac{k}{k+1}x+O(\log x), \qquad x\to\infty.$$

2. *If we denote by a_n the n-th term of the sequence* (k), *then we have*

(4) $$a_n\sim\frac{k+1}{k}n, \qquad n\to\infty.$$

3. *Let n be a natural number written in the number system of k digits,*

(5) $$n=\sum_{l=0}^{r}k^l c_l,$$

where each of the letters c_l $(l=0.\ 1, 2, \ldots, r)$ represents one of the numbers $0, 1, 2, \ldots k-1$; *then we have*

(6) $$K(n)=\frac{k}{k+1}n+\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{r}(-1)^l c_l.$$

We are now going to show the main points of the proof.

From the lemmas 1 and 2 it follows at once that the number of terms of the sequence (k), not exceeding x, is equal to the number of system l, p, r, satisfying the relation

(7) $$(kl-p)\,k^{2r}\leqslant x.$$

Hence

$$l\leqslant\frac{p}{k}+\frac{x}{k^{2r}},$$

whence follows that l can have

$$l_{mn}=\left[\frac{m}{k}+\frac{x}{k^{2n}}\right]$$

values, for definite values of $p=m$ and $r=n$. By summing up for $m=1, 2, \ldots, k-1$ and $n=0, 1, 2, \ldots$, we obtain for the number of systems l, p, r, and thus for $K(x)$, the formula (1). It is easy to show that the number of terms of the sum in this formula is finite for finite value of x.

To deduce the formula (2) it must be observed that the number of the numbers not exceeding x, divisible by a, is $\left[\frac{x}{a}\right]$.

Since the terms of the sequence (k) are of the form

$$qk^{2r}, \tag{8}$$

with $(q, k)=1$ (lemma 1), and the number of the form qk^{2r+1} do not belong to this sequence, it follows that the number of numbers of the form (8), for definite value of $r=n$, is

$$\left[\frac{x}{k^{2n}}\right]-\left[\frac{x}{k^{2n+1}}\right].$$

By summing over all $n=0, 1, 2, \ldots$ we get for $K(x)$ the formula (2). The last term nonzero of the sum is $(-1)^s\left[\frac{x}{k^s}\right]$, where $s=\left[\frac{\log x}{\log k}\right]$.

Inserting

$$\left[\frac{x}{k^m}\right]=\frac{x}{k^m}-\delta_m, \qquad 0\leqslant\delta_m<1,$$

in the formula (2), we obtain by simple calculation the formula (3). Hence it follows immediately

$$K(x)\sim\frac{k}{k+1}x, \qquad x\to\infty.$$

Denoting by a_n the n-th term of the sequence (k), we get according to the last relation

$$K(a_n)\sim\frac{k}{k+1}a_n, \qquad x\to\infty.$$

Hence and from the formula $K(a_n)=n$ follows (4).

Finally to deduce (6) it is necessary to insert in the (2) $x=n$, n being given by (5). Then first we find

$$\left[\frac{n}{k^m}\right]=c_m+kc_{m+1}+\cdots+k^{r-m}c_r,$$

and then it is not difficult to deduce the formula (6).

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 3 (1950), № 8

ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 3 (1950), № 8

Петар Р. Серафимов

СОСТОЈБАТА НА НАПРЕГАЊАТА ВО ХИПЕРБОЛИЧНИТЕ ЛУПШИ ПО ТЕОРИЈАТА НА МЕМБРАНАТА

Peter Serafimov

SPANNUNGSZUSTAND HYPERBOLISCHER SCHALEN NACH DER MEMBRANTHEORIE

Скопје — Skopje
1950

ПЕТАР Р. СЕРАФИМОВ

СОСТОЈБАТА НА НАПРЕГАЊАТА ВО ХИПЕРБОЛИЧНИТЕ ЛУШПИ ПО ТЕОРИЈАТА НА МЕМБРАНАТА

Теоријата на мембраната дава за многу проблеми од статички определено потпрени лушпи доста точна распределба на напрегањата, особено за сопствената тежина и некои истакнати товари. Ние се задоволуваме и со овие резултати од две причини:

а) резултатите одговараат во повеќе случаи со добра приближност на стварната игра на силите;

в) корекцијата што ќе се добие со прилагањето на теоријата на „јаки" лушпи ќе се покаже незначителна, а при тоа математичките тешкотии се скоро во сите случаи огромни и се иде и до проблеми што не можат да се решат.

Но и по теоријата на мебраната при решавањето на системот на диференцијалните равенки се доваѓа до големи тешкотии, особено за периодичните товари. За да се избегнат тие тешкотии и за да се дојде до некакво приближно решение, се прибегнува кон апроксимативни решенија со помошта на сметката на диференции. Нашата задача е да се најдат „затворени" решенија, т. е. да се најдат конечни општи интеграли на диференцијалните равенки и, располагајќи со интеграционите константи, овие да се определат така што условите на краиштата да бидат задоволени.

I. Теоретски основи

Бидејќи сите внатрешни сили по теоријата на мембраната се сведуваат на нормални и тангенцијални, истите ќе ги означиме на еден диференцијален елемент од нашата лушпа (сл. 2).

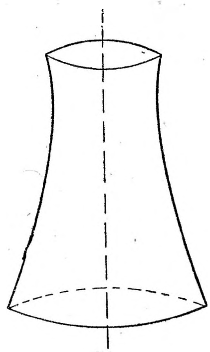
Средната површина на лушпата е еден завртлив еднограней хиперболоид во координатната система OXYZ (сл. 1). Секоја точка на хиперболоидот може да се определи со равенката

$$b^2 r_\alpha^2 - a^2 z^2 = a^2 b^2, \tag{1}$$

каде е $$r_\alpha{}^2 = x^2 + y^2,$$

а a и b се полуоските на хиперболата (1). Но исто така секоја точка е еднозначно определена и со двата агла α и β. Првиот претставува агол што го прави радиусот на кривината $\rho = R_\beta$ со оската x, а вториот е завртливниот агал β.

ХИПЕРБОЛНА ЉУСКА



СЛ. 1

Сите геометриски елементи на обртниот хиперболоид, како што ќе видиме, можат да се престават во функција од овие два агла и константите a и b.

На сл. 2 претставуваат:

N_α нормално напрегање во правецот на аголот β;

N_β нормално напрегање по правецот на α;

$N_{\alpha\beta}$ тангенцијалното напрежање по правецот на α а нормално на β;

p_x компонента на товарите по правецот на осовината x;

p_y компонента на товарите по правецот на осовината y;

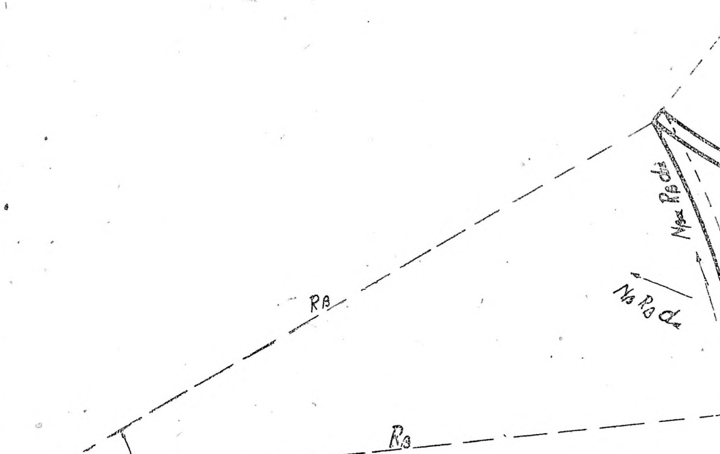
p_z компонента на товарите по правецот на осовината z.

Нормалните и тангенцијалните напрегања за пресеците што се за ds_1 и ds_2 разликуваат од овие, во кои владеат горните напрегања, се:

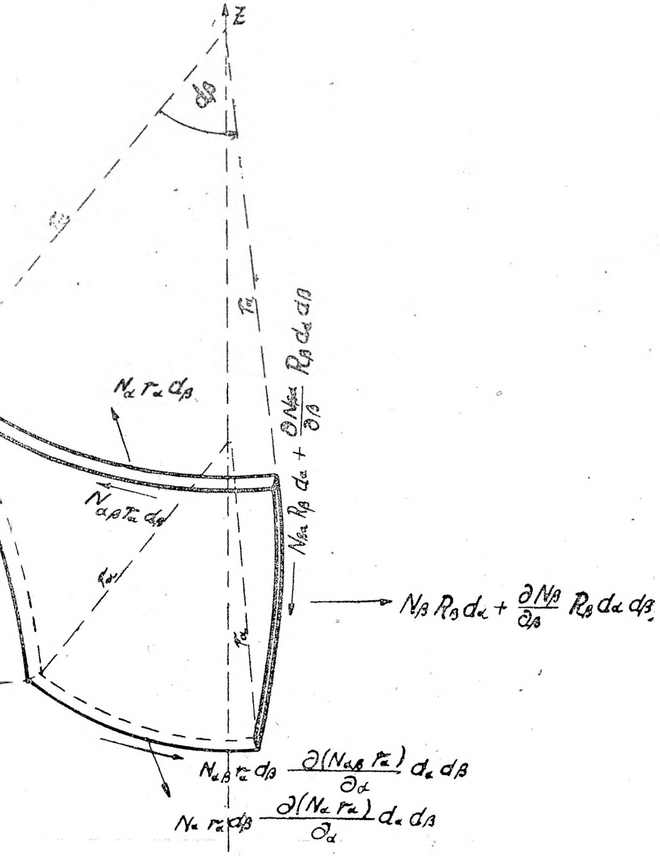
$$N_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha, \qquad N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha,$$

$$N_\beta + \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} d\beta, \qquad N_{\beta\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} d\beta.$$

Сите овие сили можат да се видат на диференцијалниот елемент (сл. 2).



Сл.2



Z
$d\beta$
r_α
$N_\alpha r_\alpha d_\beta$
$N_{\alpha\beta} r_\alpha d_\beta$
$N_{\beta\alpha} R_\beta d_\alpha + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} R_\beta d_\alpha d_\beta$
$N_\beta R_\beta d_\alpha + \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} R_\beta d_\alpha d_\beta$
$N_{\alpha\beta} r_\alpha d_\beta \; \frac{\partial (N_{\alpha\beta} r_\alpha)}{\partial \alpha} d_\alpha d_\beta$
$N_\alpha r_\alpha d_\beta \; \frac{\partial (N_\alpha r_\alpha)}{\partial \alpha} d_\alpha d_\beta$

На сл. 3, сл. 4 и сл. 5 се претставени проекциите на горните сили и тоа:

а) во правец на тангентата на хиперболата,

б) во правец на тангентата на еден произволен пресек β,

в) исто како под б) но на силите во равнината на обртниот круг.

Од (сл. 6) произлегуваат односите што се на неа изведени.

Сликата 7 ја дава зависноста само меѓу нормалните напрегања

$$N_\alpha \text{ и } N_\beta .$$

Од горните слики се добиваат следните три симултани равенки:

$$\frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial\beta} R_\beta - \frac{\partial(N_\alpha r_\alpha)}{\partial\alpha} + N_\beta R_\beta \sin\alpha + p_y r_\alpha R_\beta = 0,$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial\beta} R_\beta - \frac{\partial(N_{\alpha\beta} r_\alpha)}{\partial\alpha} - N_{\beta\alpha} R_\beta r_\alpha \sin\alpha + p_x r_\alpha R_\beta = 0, \tag{2}$$

$$N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\alpha r_\alpha + p_z r_\alpha R_\beta = 0 .$$

Од виртуелното завртување на елементот (сл. 2) околу оската z, и ако се занемарат бескрајно малите големини од втор ред, се добива:

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} , \tag{3}$$

т. е. за тангенцијалните напрегања во правците како што сме ги избрале важи односот за равна состојба на напрегањата.

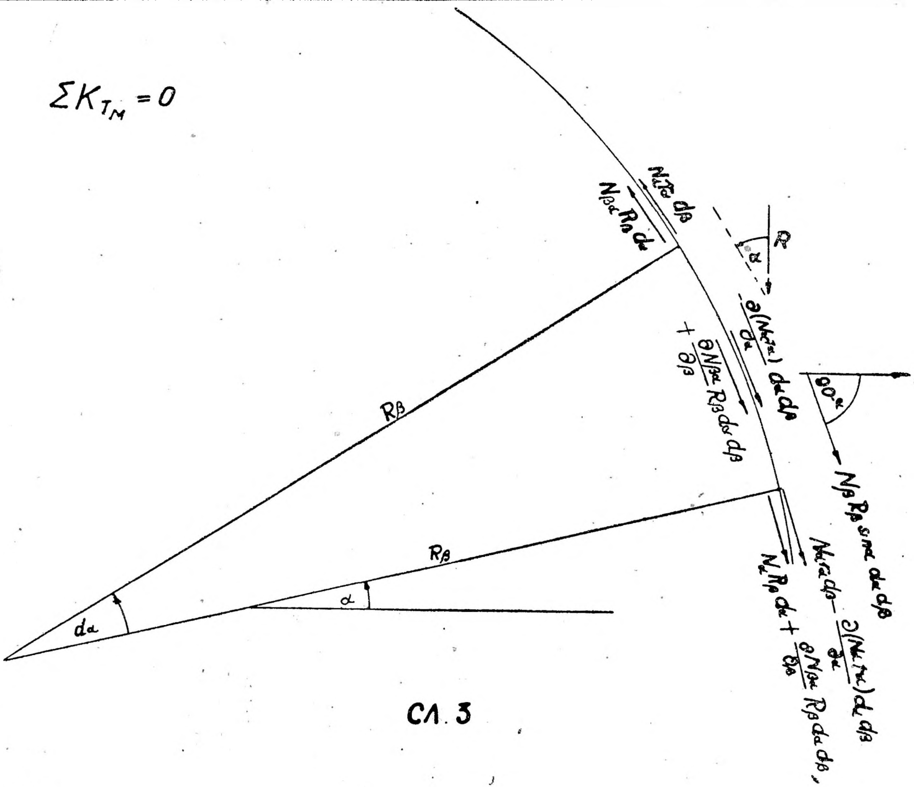
Ако е товарот ротационо симетричен, т. е. за секоја равнина што минува низ осовината z е симетричен, тогаш и N_β и $N_{\alpha\beta}$ не зависат од β т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial\beta} = 0, \qquad \text{за } f = N_\beta ,\ N_{\alpha\beta} \tag{4}$$

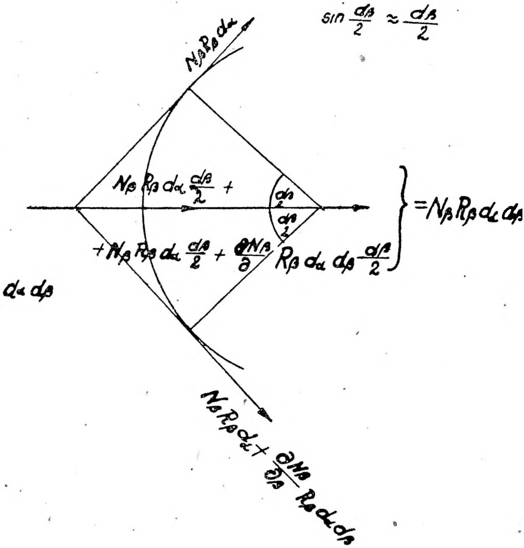
Ако се земат предвид условите (3) и (4), системот на парцијалните диференцијални равенки (2) изгледа:

$$-\frac{d(N_\alpha r_\alpha)}{d\alpha} + N_\beta R_\beta \sin\alpha + p_y r_\alpha R_\beta = 0,$$

$$\Sigma K_{\tau_M} = 0$$



СЛ. 3



$$\sin\frac{d\beta}{2} \approx \frac{d\beta}{2}$$

СЛ. 4

$$\frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial\beta} R_\beta\, d\alpha\, d\beta - \frac{\partial}{\partial\alpha}(N_\alpha \tau_\alpha)\, d\alpha\, d\beta + N_\beta R_\beta\, d\alpha\, d\beta \sin\alpha + p\, \tau_\alpha\, d\alpha\, R_\beta\, d\beta \cos\alpha = 0$$

$$\frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial\beta} R_\beta - \frac{\partial (N_\alpha \tau_\alpha)}{\partial\alpha} + N_\beta R_\beta \sin\alpha + p\,\tau_\alpha R_\beta \cos\alpha = 0$$

$$-\frac{d(N_{\alpha\beta}\, r_\alpha)}{d\alpha} - N_{\alpha\beta}\, R_\beta \sin\alpha + p_x\, r_\alpha\, R_\beta = 0, \tag{5}$$

$$N_\beta\, R_\beta \cos\alpha - N_\alpha\, r_\alpha + p_z\, r_\alpha\, R_\beta = 0.$$

Со системот на диференцијалните равенки (5) задачата може да се решава за сите ротационо симетрични товари.

II. Геометриски особини на хиперболата

Генератрисата на ротациониот хиперболоид е хипербола (1), што е претставена во равнината $O\, r_\alpha z$ (сл. 8).

За да може аголот α, што радиусот на кривината ρ го прави со оската r_α да се земе како параметар, ќе ги воведеме следните односи:

$$z' = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b^2\, r_\alpha}{a^2\, z}, \tag{6}$$

и оттука

$$z = \frac{b^2\, r_\alpha}{a^2 \operatorname{cotg}\alpha}. \tag{7}$$

Полупречникот на хиперболата е:

$$\rho = R_\beta = a^2\, b^2 \left(\frac{r_\alpha^{\,2}}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}\right)^{3/2}, \tag{8}$$

а со оглед на (7):

$$R_\beta = \frac{b^2\, r_\alpha^{\,2}}{a^4} \cdot \frac{1}{\cos^3\alpha}. \tag{9}$$

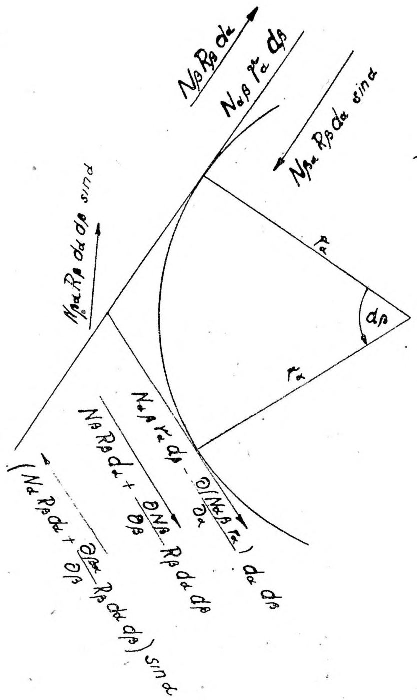
На сличен начин може со помошта на (1) и (7) да се изрази и r_α во функција од α:

$$r_\alpha = \frac{a^2 \cos\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}, \tag{10}$$

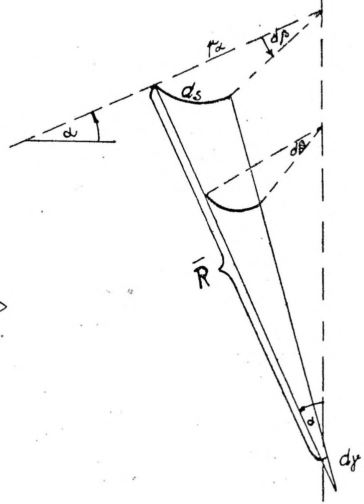
и наполно аналогно, користејќи ги (7), (9) и (10):

$$R_\beta = \frac{a^2\, b^2}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}}, \tag{11}$$

$\Sigma K_{T_\beta} = 0$



СЛ. 5



СЛ. 6

$$-\frac{\partial (N_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta})}{\partial_\alpha} d_\alpha d_\beta + \frac{\partial N_\beta}{\partial_\beta} R_\beta d_\alpha d_\beta - N_{\beta\alpha} R_\beta d_\alpha d_\beta \sin + p_z d_\alpha d_\beta r_\alpha R_\beta = 0$$

$$-\frac{\partial (N_{\alpha\beta} r_\alpha)}{\partial_\alpha} + \frac{\partial N_\beta}{\partial_\beta} R_\beta - N_{\beta\alpha} R_\beta \sin\alpha + p_z r_\alpha R_\beta = 0$$

$\bar{R}\, d_\gamma = d_s$ $\qquad \bar{R} = \frac{r_\alpha}{\sin\alpha}$

$r_\alpha d_\beta = d_s$

$d_\gamma = d_\beta \sin\alpha$

$$z = \frac{b^2 \sin\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}}. \tag{12}$$

За решавање на системот на диференцијалните равенки, потребни се и следните односи:

$$\frac{d r_\alpha}{d\alpha} = \frac{a^2 b^2 \sin\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}} = R_\beta \sin\alpha, \tag{13}$$

и

$$\frac{r_\alpha}{R_\beta \cos\alpha} = \frac{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha}{b^2}. \tag{14}$$

Со односите (6)—(14) што сите произлегуваат од геометриските особини на хиперболата (1), можат да се барат решенија на диференцијалните равенки (5).

III. Состојба на напрегањата

за $p = \text{const}$ (сопствена тежина на лушпата)

Во овој случај се има:

$$\begin{aligned} p_y &= p\cos\alpha, \\ p_x &= 0, \\ p_z &= -p\sin\alpha, \end{aligned} \tag{15}$$

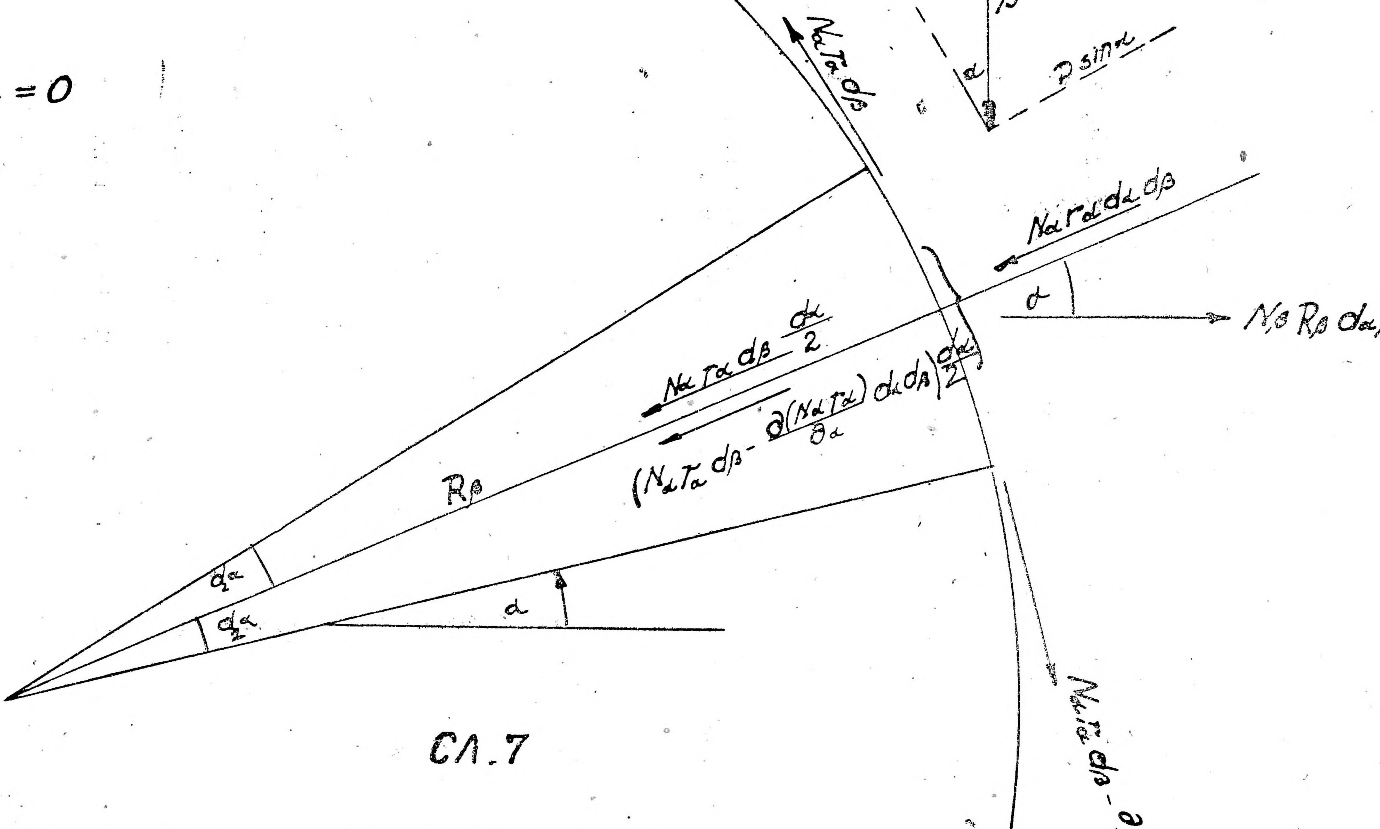
и со овие од (5) се добива:

$$\begin{aligned} -r_\alpha \frac{dN_\alpha}{d\alpha} - N_\alpha \frac{d r_\alpha}{d\alpha} + R_\beta N_\beta \sin\alpha + p r_\alpha R_\beta \cos\alpha &= 0, \\ -r_\alpha \frac{dN_{\alpha\beta}}{d\alpha} - N_{\alpha\beta} \frac{d r_\alpha}{d\alpha} - N_{\alpha\beta} R_\beta \sin\alpha &= 0, \\ N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\alpha r_\alpha - p r_\alpha R_\beta \sin\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Од третата равенка на (16) се добива:

$$N_\beta R_\beta = \frac{N_\alpha r_\alpha}{\cos\alpha} + p r_\alpha R_\beta \operatorname{tg}\alpha. \tag{17}$$

$$\Sigma K_N = 0$$



СЛ.7

$$\cos\alpha\, N_\beta R_\beta\, d\alpha\, d\beta - N_\alpha r_\alpha\, d\alpha\, d\beta - p \sin\alpha\, r_\alpha\, d\alpha\, d\beta\, R_\beta = 0$$

$$N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\alpha r_\alpha - p\, r_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0$$

Со оваа вредност од првата равенка (16) се добива:

$$r_\alpha \frac{dN_\alpha}{d\alpha} - N_\alpha \frac{d^2 r_\alpha}{d\alpha} - N_\alpha \frac{r_\alpha}{\cos\alpha} \sin\alpha + p r_\alpha R_\beta (\cos\alpha + \operatorname{tg}\cos\alpha) = 0,$$

или, по сведувањето и уредувањето:

$$\text{(17a)} \qquad \frac{dN_\alpha}{d\alpha} + N_\alpha \left(\frac{1}{r_\alpha} \frac{dr_\alpha}{d\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) - p \frac{R_\beta}{\cos\alpha} = 0.$$

Од (10) и (13) се добива:

$$\text{(18)} \qquad \frac{1}{r_\alpha} \frac{dr_\alpha}{d\alpha} = \frac{b^2 \operatorname{tg}\alpha}{a^2 \cos^2\alpha - b^2 \sin^2\alpha},$$

така што со (17) и (18) од првата од (16) се добива:

$$\text{(19)} \qquad \frac{dN_\alpha}{d\alpha} + N_\alpha \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{b^2}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - 1\right) -$$

$$- \frac{p a^2 b^2}{\cos\alpha (a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}} = 0.$$

Диференцијалната равенка (19) е една линеарна диференцијална равенка од прв ред. Нејзиниот општ интеграл е:

$$\text{(20)} \qquad N_\alpha = -\exp\int\left(\frac{b^2 \operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) d\alpha \cdot$$

$$\cdot \left[C + p a^2 b^2 \int \exp\left(\frac{b^2 \operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) \cdot \right.$$

$$\left. \frac{d\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}} \right].$$

Интеграцијата на:

$$J = -\exp\int\left(\frac{b^2 \operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) d\alpha,$$

дава:

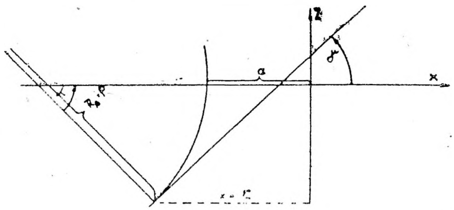
$$J = \frac{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}{\cos^2\alpha},$$

и на сличен начин:

$$J_1 = \exp \int \left(\frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) d\alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{(a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}.$$

Со овие вредности се добива од (20):

$$N_\alpha = \frac{(a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}{\cos^2 \alpha} \left[C + p a^2 b^2 \int \frac{\cos \alpha \; d\alpha}{(a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right].$$



Сл 8

Смената $\sin \alpha = t$ овозможува да се израчуна горниот интеграл, и по извршената интеграција и минувањето на старата независно променливо α се добива:

$$N_\alpha = \frac{(a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}{\cos^2 \alpha} \cdot \tag{21}$$

$$\cdot \left[C + \frac{p b^2}{4a \sqrt{a^2 + b^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha}{a - \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha} + \frac{p b^2 \sin \alpha}{2 \left[a^2 - (a^2 + b^2) \sin^2 \alpha \right]} \right].$$

Со помошта на (21) може да се од (17) израчуна и N_β:

$$N_\beta = \frac{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha}{b^2} N_\alpha + \frac{p a^2 \sin \alpha}{(a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}. \tag{22}$$

Тангенцијалните напрегања $N_{\alpha\beta}$ можат да се определат од втората равенка од (5), што е независна од N_α и N_β. Таја ги разделува менливите:

$$\frac{d N_{\alpha\beta}}{d\alpha} = - N_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{r_\alpha} \frac{d r_\alpha}{d\alpha} + \frac{R_\beta \sin \alpha}{r_\alpha} \right). \tag{23}$$

Со обзир на (10), (13) и (14) се добива:

$$\frac{dN_{\alpha\beta}}{d\alpha} = -\left(\frac{b^2\operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} + \frac{b^2\operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha}\right) d\alpha,$$

или

$$\frac{dN_{\alpha\beta}}{N_{\alpha\beta}} = -2\,\frac{b^2\operatorname{tg}\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha}\,d\alpha.$$

Интеграцијата дава:

$$N_{\alpha\beta} = C_1\,\frac{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}. \tag{24}$$

Со добивањето на општите интеграли (21), (22) и (24) проблемот е од математичка страна решен, но тие решенија, од гледна точка на механиката на деформабилни тела, требе да бидат такви, константите C и C_1 да добијат свои физикални значења. Овие значења тие ке ги добијат од условите на краиштата. За товарот што се испитува тука важат следните услови:

а) на горниот крај, т. е. за $\alpha = \alpha_0$ треба да е $N_\alpha = 0$ (бидејќи над таа зона $\alpha = \alpha_0$ нема товар p)

б) во истата равнина, т. е. за $\alpha = \alpha_0$ треба да е и $N_{\alpha\beta} = 0$, од истите разлози како горе.

Вториот услов од (24) дава:

$$C_1 = 0$$

а првиот од (21) дава:

$$C = -\frac{pb^2}{4a\sqrt{a^2+b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha_0}{a-\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha_0} - \frac{pb^2\sin\alpha_0}{2\,[a^2-(a^2+b^2)\sin^2\alpha_0]}, \tag{24a}$$

и со ова (21) добива облик:

$$N_\alpha = \frac{pb^2}{2\cos^2\alpha}\,(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}\cdot \tag{25}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2ae}\ln\frac{(a+e\sin\alpha)(a-e\sin\alpha_0)}{(a+e\sin\alpha_0)(a-e\sin\alpha)} + \frac{\sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\alpha_0}{a^2\cos^2\alpha_0 - b^2\sin^2\alpha_0}\right\}.$$

Кога се има (25) може од (22) да се добие N_β:

(25а)
$$N_\beta = \frac{p}{2\cos^2\alpha\,(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\Bigg\{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)\left[\frac{1}{2ae}\ln\frac{(a+e\sin\alpha)(a-e\sin\alpha_0)}{(a+e\sin\alpha_0)(a-e\sin\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\alpha}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - \frac{\sin\alpha_0}{a^2\cos^2\alpha_0 - b^2\sin^2\alpha_0}\right] + 2a^2\sin\alpha\cos^2\alpha\Bigg\}.$$

Од условот да е $C_1 = 0$ се добива и

$$N_{\alpha\beta} = 0$$

т. е. тангенцијалните напрегања од ротационо симетричен константен товар што немаат компонента по x осовина се еднакви на нула.

III-А. Дискусија на добиените резултати

Хиперболичната лушпа е по својот облик веке една на горниот дел отворена лушпа. Можеме да го дискутираме резултатот за да видиме како ќе се владаат напрегањата, ако се изврши таква трансформација на хиперболата, ако таа мине во круг:

(26)
$$r_\alpha^2 + z^2 = a^2.$$

За да се дојде од (1) во (26) треба да се земе $b = ai$, каде е $i = \sqrt{-1}$ Ако се замени $b = ai$ во (25) се добива од:

(27)
$$K = \frac{1}{2a\sqrt{a^2+b^2}}\ln\frac{(a+\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha)(a-\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha_0)}{(a+\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha_0)(a-\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha)},$$

неопределениот израз:

(28)
$$K = \frac{0}{0}.$$

Оваа вредност прави N_α да биде исто така неопределена, т. е. да нема никаков механички смисол. За да ја определиме вистинската вредност на (27) треба да се примени L'Hospital-овото правило со ознаките:

$$
(29)\quad \begin{aligned} f_1(b) &= \ln \frac{(a+\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha)\ (a-\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha_0)}{(a+\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha_0)(a-\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha)}, \\ f_2(b) &= 2a\sqrt{a^2+b^2}\,. \end{aligned}
$$

L'Hospital-овото правило дава:

$$
(29a)\qquad K = \frac{f_1'(b)}{f_2'(b)} = \lim_{a\to bi} k = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha_0}{a^2}.
$$

При трансформацијата $b = ai$ минуваат и аголите α и α_0 во:

$$
(30)\qquad \begin{aligned} \alpha &= -(90^0 - \gamma), \\ \alpha_0 &= -(90^0 - \gamma_0), \end{aligned}
$$

каде е γ агол мерен од оската z. Со овие вредности за (25) ќе се добие:

$$
N_\alpha = -\frac{pa}{\sin\alpha}(\cos\gamma_0 - \cos\gamma).
$$

Овој резултат се поклопува со тој за отворена каблова лушпа (купола) (в. напр. Beyer: Statik im Eisenbetonbau, Aufl. II, стр. 751 формула 1118).

Истата дискусија може да се проведе и за N_β од (25a).

Имајќи предвид (29a) од (25a) се добива:

$$
N_\beta = \frac{p}{2a\cos\alpha}\left\{a^4\left[\frac{\sin\alpha - \sin\alpha_0}{a^2} + \frac{\sin\alpha}{a^2} - \frac{\sin\alpha_0}{a^2}\right] + \right.
$$

$$
\left. + 2a^2 \sin\alpha\cos^2\alpha\right\},
$$

или

$$
N_\beta = \frac{ap}{2\cos^2\alpha}\{2\sin\alpha - 2\sin\alpha_0 + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha_0\} =
$$

$$
= \frac{ap}{\cos^2\alpha}(2\sin\alpha - \sin\alpha_0 - \sin^3\alpha).
$$

Со обзир на (30) се добива:

$$N_\beta = \frac{ap}{\sin^2 \gamma} \left(-2 \cos \gamma + \cos \gamma_0 + \cos^3 \gamma \right),$$

или

$$N_\beta = ap \left(\frac{\cos \gamma_0 - \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \cos \gamma \right),$$

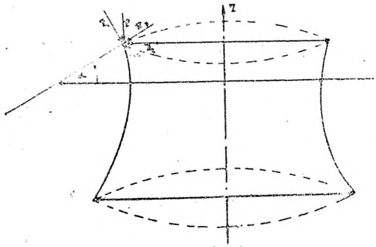
што се поклопува за отворена топкаста лушпа [Beyer стр. 751 Aufl. II формула (1118)]

IV. Константен товар $P^t/_m$ на горниот крај на лушпата

Константниот континуиран товар $P^t/_m$ на горниот крај на хиперболичната завртна лушпа (сл. 9) може да се разложи на две компоненти P_1 и P_3 во правецот на тангентата и во правецот на нормалата:

$$P_1 = \frac{P}{\cos \alpha},$$

$$P_3 = -P \sin \alpha .$$



Сл. 9

Последната компонента дава една компонента во равнината на горниот круг:

$$P_2 = -P_3 \cos \alpha = P \sin \alpha \cos \alpha ,$$

што ќе биде примена од самиот круг што треба да е отпорен на свиткување. Ова ни покожува, да ако постојат товари на горниот крај на лушпата, оваа треба да има обрач отпорен на свиткување.

За нас претставува интерес само компонентата P_1. Во равенките (5) треба да се сложи:

$$p_x = p_y = p_z = 0,$$

и се добива:

$$-\frac{d(N_\alpha r_\alpha)}{d\alpha} + N_\beta R_\beta \sin\alpha = 0,$$

(31)
$$-\frac{d(N_{\alpha\beta} r_\alpha)}{d\alpha} - N_{\alpha\beta} \sin\alpha = 0,$$

$$N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\alpha r_\alpha = 0.$$

Од третата равенка од (31) се добива:

(32)
$$N_\beta R_\beta = \frac{N_\alpha r_\alpha}{\cos\alpha},$$

и првата ќе добие облик:

$$-r_\alpha \frac{dN_\alpha}{d\alpha} - N_\alpha \frac{dr_\alpha}{d\alpha} + r_\alpha N_\alpha \operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Со (13) и (14) од горната равенка ќе се добије:

$$\frac{dN_\alpha}{d\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{b^2}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - 1\right)N_\alpha = 0$$

и после интеграцијата на оваа диференцијална равенка:

(33)
$$N_\alpha = C\,\frac{\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^3\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha}.$$

Со оваа вредност од (32) се добива:

$$N_\beta = C\,\frac{r_\alpha}{R_\beta\cos^3\alpha}\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha},$$

или, со обзир на (14):

(34)
$$N_\beta = C\,\frac{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}}{b^2\cos^2\alpha}.$$

За да се определи интеграционата константа, треба да се тргне од условот на крајот:

$$\alpha = \alpha_0, \quad N_{\alpha 0} = P_1 = \frac{P}{\cos\alpha_0},$$

и со тоа од (33):

$$C = \frac{P \cos \alpha_0}{(a^2 \cos^2 \alpha_0 - b^2 \sin^2 \alpha_0)^{1/2}}. \tag{35}$$

Со помошта на (35) се добива:

$$N_\alpha = \frac{P \cos \alpha_0}{\cos^2 \alpha} \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha_0 - b^2 \sin^2 \alpha_0}}, \tag{33a}$$

$$N_\beta = \frac{P \cos \alpha_0}{b^2 \cos^2 \alpha} \sqrt{\frac{(a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha)^3}{a^2 \cos^2 \alpha_0 - b^2 \sin^2 \alpha_0}}. \tag{34a}$$

Од втората равенка на (31) ќе добива:

$$-r_\alpha \frac{d N_{\alpha\beta}}{d\alpha} - N_{\alpha\beta} \frac{d r_\alpha}{d\alpha} - N_{\alpha\beta} R_\beta \sin \alpha = 0,$$

или

$$\frac{d N_{\alpha\beta}}{d\alpha} + N_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{r_\alpha} \frac{d r_\alpha}{d\alpha} + \frac{R_\beta \sin \alpha}{r_\alpha} \right) = 0.$$

Со обзир на (10), (11) и (13) и по уредувањето, се добива:

$$\frac{d N_{\alpha\beta}}{d\alpha} + N_{\alpha\beta} \frac{2 b^2 \operatorname{tg} \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha} = 0.$$

Интеграцијата на оваа диференцијална равенка дава:

$$N_{\alpha\beta} = C_1 \frac{\cos \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Интеграционата константа C_1 ќе ја добиеме од условот

$$\alpha = \alpha_0, \quad N_{\alpha\beta} = 0,$$

т. е.

$$C_1 = 0,$$

и според тоа, $N_{\alpha\beta} = 0$ за сите пресеци на хиперболичната лушпа.

Дискусијата извршена како во IIIа на резултатите (33а) и (34а), дава резултатите, трансформовани за топкаста лушпа, да се сложуваат со веќе познатите резултати,

V. Периодичен товар

Периодичен товар може да настапи во главно од овие три причини: а) товар од ветар, б) од начинот како краиштата се изведени, в) од некакви осцилации што би се јавиле во лушпата.

Во секој од овие случаи може товарната функција, а според тоа и нејзините компоненти p_x, p_y, p_z да бидат претставени со тригонометриски редови на аголот β и во кој изразите X_n, Y_n, Z_n се функции само на аголот α. Овие функции изледаат:

$$
\begin{aligned}
p_x &= \sum_{i=1}^{n} X_n \sin n\beta , \\
p_y &= \sum_{i=1}^{n} Y_n \cos n\beta , \qquad (36) \\
p_z &= \sum_{i=1}^{n} Z_n \cos n\beta \qquad\qquad n=0,1,2,\cdots\infty .
\end{aligned}
$$

Парцијалните диференцијални равенки (2) во случај на равновесие на внатрешните и надворешните (36) сили, ќе бидат задоволени со следните односи:

$$
\begin{aligned}
N_\alpha &= \sum_{i=1}^{n} N_{\alpha n} \cos n\beta , \\
N_\beta &= \sum_{i=1}^{n} N_{\beta n} \cos n\beta , \qquad (37) \\
N_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^{n} N_{\alpha\beta n} \sin n\beta ,
\end{aligned}
$$

ако се функциите $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$ функции само од аголот α и ако секој член од горните редови ги задоволува следните диференцијални равенки:

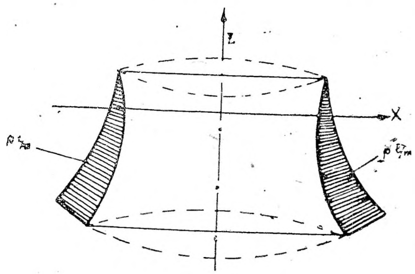
$$R_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(r_\alpha \sum N_{\alpha n} \cos n\beta\right) +$$

$$+ R_\beta \sin\alpha \sum N_{\beta n} \cos n\beta = - r_\alpha R_\beta \sum Y_n \cos n\beta ,$$

$$R_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum N_{\beta n} \cos n\beta\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(r_\alpha \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta\right) - \tag{38}$$

$$- R_\beta \sin\alpha \sum N_{\alpha\beta n} \sin n\beta = r_\alpha R_\beta \sum X_n \sin n\beta ,$$

$$R_\beta \cos\alpha \sum N_{\beta n} \cos n\beta - r_\alpha \sum N_{\alpha n} \cos n\beta = r_\alpha R_\beta \sum \cos n\beta .$$



СЛ 10

Ако се изврши диференцирањето, имајќи предвид да $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$, X_n, Y_n, Z_n се функции само од α, се иде до следниот систем на обични диференцијални равенки:

$$n R_\beta N_{\alpha\beta n} \cos n\beta - \cos n\beta \; \frac{d(r_\alpha N_{\alpha n})}{d\alpha} +$$

$$+ R_\beta N_{\beta n} \sin\alpha \cos n\beta = - r_\alpha R_\beta Y_n \cos n\beta ,$$

$$- n R_\beta N_{\beta n} \sin n\beta - \sin n\beta \; \frac{d(r_\alpha N_{\alpha n})}{d\alpha} -$$

$$- R_\beta N_{\alpha\beta n} \sin\alpha \sin n\beta = r_\alpha R_\beta X_n \sin n\beta ,$$

$$R_\beta \cos\alpha N_{\beta n} \cos n\beta - r_\alpha N_{\alpha n} \cos n\beta = r_\alpha R_\beta Z_n \cos n\beta .$$

Како што се гледа горниот систем после скратувањето со $\cos n\beta$ ќе даде:

$$(39) \qquad n R_\beta N_{\alpha\beta n} - \frac{d(r_\alpha N_{\alpha n})}{d\alpha} + R_\beta \sin\alpha N_{\beta n} = -r_\alpha R_\beta Y_n,$$

$$(40) \qquad n R_\beta N_{\beta n} + \frac{d(r_\alpha N_{\alpha\beta n})}{d\alpha} + R_\beta \sin\alpha N_{\alpha\beta n} = r_\alpha R_\beta X_n,$$

$$(41) \qquad R_\beta N_{\beta n} \cos\alpha - r_\alpha N_{\alpha n} = r_\alpha R_\beta Z_n.$$

Значи, условите (36) што преставуваат еден периодичен товар и односите (37), што ги даваат напрегањата пак како периодични функции, прават од системата на парцијални диференцијални равенки (2) да се дојде до обични диференцијални равенки (39), (40) и (41).

Од (41) следува:

$$(41a) \qquad r_\alpha N_{\alpha n} = R_\beta N_{\beta n} \cos\alpha - r_\alpha R_\beta Z_n,$$

а диференцирањето ќе даде:

$$\frac{d}{d\alpha}(N_{\alpha n} r_\alpha) = \frac{d}{d\alpha}(N_{\beta n} R_\beta \cos\alpha) - \frac{d}{d\alpha}(r_\alpha R_\beta Z_n).$$

Со овија вредности од (39) и (40) се има:

$$(42) \qquad n R_\beta N_{\alpha\beta n} - \frac{d}{d\alpha}(N_{\beta n} R_\beta \cos\alpha) + R_\beta \sin\alpha N_{\beta n} =$$

$$= -r_\alpha R_\beta Y_n - \frac{d}{d\alpha}(r_\alpha R_\beta Z_n),$$

$$(43) \qquad n R_\beta N_{\beta n} + \frac{d}{d\alpha}(N_{\alpha\beta n} r_\alpha) + R_\beta \sin\alpha N_{\alpha\beta n} = X_n r_\alpha R_\beta.$$

Примениот начин за решавање на вакви системи од диференцијални равенки е од овие да се елиминира една непозната функција $N_{\beta n}$ или $N_{\alpha\beta n}$ и да се добие една диференцијална равенка од втор ред. Но ако се иде по овој пат, а предходно не се изврши некаква трансформација, се доваѓа до една Hill-ова диференцијална равенка и нејзиниот интеграл е од облик што неможеме да го користиме за понатамошната дискусија. За да можеме да најдеме едно конечно и „затворено“ решение ќе извршиме трансформација на координатите така; што сите геометриски особини на хиперболата a и односите во II што се јавуваат во (42) и (43) ги представиме во елиптични координати.

Декартовите правоагални координати x, y, z во функција на елиптилните ξ, η, β се дадени со односите:

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
x &= e\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\,\sin\beta,\\
y &= e\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\,\sin\beta,\\
z &= e\,\xi\,\eta, \qquad\qquad e=\sqrt{a^2+b^2},
\end{aligned}
$$

и, ако се има ротационен едногранен хиперболоид, треба да е $\eta=\eta_0$ Меѓу η_0 и e од една и полуосовините a и b од друга страна, постојат зависности:

$$
(45)\qquad
\begin{aligned}
a &= e\sqrt{1-\eta_0^{\,2}},\\
b &= e\,\eta_0 .
\end{aligned}
$$

Со равенката:

$$
(46)\qquad r_\alpha^{\,2} = x^2+y^2 = e^2(1+\xi^2)(1-\eta^2),
$$

и односите (45), равенката на хиперболата ќе биде:

$$
(47)\qquad \frac{r_\alpha^{\,2}}{e^2(1-\eta_0^{\,2})} - \frac{z^2}{e^2\eta_0^{\,2}} = 1 .
$$

Пошто во (42) и (43) фигурираат α, $R_\beta=\rho$, r_α, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, то сите овие треба да се преставаат во функција од новата елиптична менљива ξ

Ако се смета z како функција од r_α, од (47) се добива:

$$
(48)\qquad z z' = \frac{\eta_0^{\,2}}{1-\eta_0^{\,2}}\, r_\alpha, \quad \text{при} \quad z'=\frac{dz}{dr_\alpha}
$$

и z' има значај на тангенсот на аголот од тангентата на завртната хипербола (47) или (1) што таа го заклапа со оската r_α. Со обзир на (44) и (46) од горното се има:

$$
(49)\qquad z' = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\eta_0^{\,2}}}\;\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\xi}.
$$

Втората диференцијација на (48) по r_α дава:

$$z'^2 + zz'' = \frac{\eta_0^2}{1-\eta_0^2},$$

и со обзир на (44) и (49):

$$z'' = -\frac{\eta_0}{e(1-\eta_0^2)}\,\frac{1}{\xi^3}. \tag{50}$$

Со помошта на (49) и (50) радиусот на кривината $\rho = R_\beta$ може да биде напишан:

$$\rho = R_\beta = \frac{e}{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}\,(\xi^2+\eta_0^2)^{3/2}. \tag{51}$$

Од сл. 11 се гледа дека е $\gamma = 90 - \alpha$ и со тоа се има, со обзир на (46):

$$\operatorname{tg}\gamma = z' = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-\eta_0^2}}\,\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\xi}, \tag{52}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} = \frac{\xi\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}, \tag{53}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\eta_0\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}, \tag{54}$$

$$R_\beta\cos\alpha = -r_\alpha\,\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta_0^2}, \tag{55}$$

$$R_\beta\sin\alpha = -\frac{e}{r_\alpha}\,\xi(\xi^2+\eta_0^2). \tag{56}$$

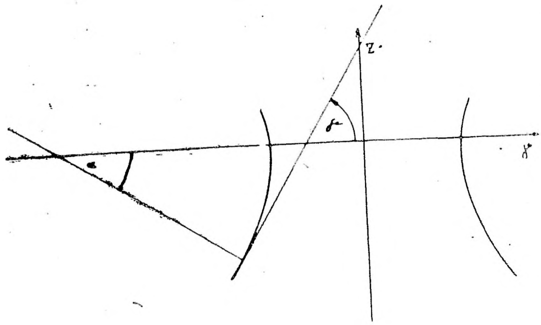
Од (52) се има, после диференцијата:

$$d\alpha = \eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}\,\frac{d\xi}{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}}. \tag{57}$$

Односите (53), (54), (55), (56) и (57) ни даваат можност диференцијалните равенки (42) и (43) да ги напишеме во облик:

$$(58)\qquad n\,\frac{e\,(\xi^2+\eta_0^2)^{3/2}}{\sqrt{1-\eta_0^2}}\,N_{\alpha\beta n}+\frac{d}{d\xi}\left(N_{\beta n}\,r_\alpha\,\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta_0^2}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\frac{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}}{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}-\frac{e}{\eta_0}\,\xi\,(\xi^2+\eta_0^2)\,N_{\beta n}=f(\alpha),$$



СЛ 11

$$(59)\qquad -n\,\frac{e^2\,(\xi^2-\eta_0^2)^{3/2}}{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}\,N_{\beta n}+\frac{d}{d\xi}\left(r_\alpha\,N_{\alpha\beta n}\,\frac{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}}{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}\right)-$$

$$-\frac{e}{\eta_0}\,\xi\,(\xi^2+\eta_0^2)\,N_{\alpha\beta n}=\varphi(\alpha),$$

каде што е независно променлива ξ а $f(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ се:

$$(60)\qquad f(\alpha)=-Y_n\,r_\alpha\,R_\beta-\frac{d}{d\alpha}\,(Z_n\,r_\alpha\,R_\beta),$$

$$(61)\qquad \varphi(\alpha)=X_n\,r_\alpha\,R_\beta\,.$$

каде што сите големини, зависни од α, после ќе ги изразиме во функција од ξ. По упростувањето, диференцијалните равенки (58) и (59) можат да се напишат во облик:

$$(58a)\qquad -\frac{ne\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}\,N_{\alpha\beta n}+\frac{d}{d\xi}\left(N_{\beta n}\,r_\alpha\,\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta_0^2}\right)-$$

$$-\frac{e\xi\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}\,N_{\beta n}=f(\alpha)\,\frac{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}},$$

$$(59a)\qquad -\frac{ne\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}N_{\beta n}+\frac{d}{d\xi}(N_{\alpha\beta n}r_\alpha)-\frac{e\xi\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}N_{\alpha\beta n}=$$

$$=f(\alpha)\frac{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Коефициентите од $N_{\alpha\beta n}$ и $N_{\beta n}$ во (58a) и (59a) со обзир на (46) можат да се напишат во облик:

$$(62)\qquad \frac{e\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}=\frac{e\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta_0^2)}}{(1+\xi^2)\sqrt{1-\eta_0^2}}\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}=$$

$$=r_\alpha\frac{\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{(1+\xi^2)}\sqrt{1-\eta_0^2}$$

$$(63)\qquad \frac{e\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}=r_\alpha\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1+\eta_0^2}\frac{\sqrt{1+\eta_0^2}}{(1+\xi^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}},$$

$$(64)\qquad \frac{e\xi\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}=\frac{\xi}{1+\xi^2}e\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta_0^2)}=\frac{\xi}{1+\xi^2}r_\alpha,$$

$$(65)\qquad \frac{e\xi\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}=\frac{\xi}{1+\xi^2}\frac{1-\eta_0^2}{\xi^2+\eta_0^2}\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta_0^2}r_\alpha.$$

Со помошта на (62), (63), (64) и (65) нашите диференцијални равенки (58a) и (59a) добиваат облик

$$(66)\qquad -\frac{n\sqrt{\xi^2-\eta_0^2}}{(1+\xi^2)\sqrt{1-\eta_0^2}}(N_{\alpha\beta n}r_\alpha)+\frac{d}{d\xi}\left(N_{\beta n}r_\alpha\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta^2}\right)-$$

$$-\frac{\xi}{1+\xi^2}\frac{1-\eta_0^2}{\xi^2+\eta_0^2}\left(N_{\beta n}r_\alpha\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta_0^2}\right)=f_1,$$

$$(67)\qquad -\frac{n\sqrt{1-\eta_0^2}}{(1+\xi^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}\left(N_{\beta n}r_\alpha\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta_0^2}\right)+\frac{d}{d\xi}(N_{\alpha\beta n}r_\alpha)-$$

$$-\frac{\xi}{1+\xi^2}(N_{\alpha\beta n}r_\alpha)=\varphi_1,$$

во кој се со f_1 и φ_1 означени десните страни од (58a) и (59a).

Наместо нашите непознати функции $N_{\beta n}$ и $N_{\alpha\beta n}$, ќе ги воведеме следните нови функции:

$$U_1 = r_\alpha N_{\alpha\beta n}, \tag{68}$$

$$U_2 = r_\alpha \frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta_0^2} N_{\beta n},$$

и наместо (66) и (67) ќе се добие:

$$-\frac{n\sqrt{1-\eta_0^2}}{1+\xi^2} \frac{\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{1-\eta_0^2} U_1 + \frac{dU_2}{d\xi} - \frac{\xi}{1+\xi^2} \frac{1-\eta_0^2}{\xi^2+\eta_0^2} U_2 = f_1, \tag{69}$$

$$-\frac{n\sqrt{1-\eta_0^2}}{(1+\xi^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}} U_2 + \frac{dU_1}{d\xi} - \frac{\xi}{1+\xi^2} U_1 = \varphi_1. \tag{70}$$

Од диференцијалната равенка (70) се добиваат:

$$U_2 = \frac{(1+\xi^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{n\sqrt{1-\eta_0^2}} \left(\frac{dU_1}{d\xi} - \frac{\xi}{1+\xi^2} U_1 - \varphi_1\right) \tag{71}$$

а од (71)

$$\frac{dU_2}{d\xi} = \frac{(1+\xi^2)\sqrt{\xi^2-\eta_0^2}}{n\sqrt{1-\eta_0^2}} \cdot \frac{d^2U_1}{d\xi^2} +$$

$$+\left[\frac{3\xi^2+2\xi\eta_0^2+\xi}{n\sqrt{(1-\eta_0^2)(\xi^2+\eta_0^2)}} - \frac{\xi\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{n\sqrt{1-\eta_0^2}}\right] \frac{dU_1}{d\xi} -$$

$$-\left[\frac{3\xi^4+2\xi^2\eta_0^2+\xi^2}{n(1+\xi^2)\sqrt{(1-\eta_0^2)(\xi^2+\eta_0^2)}} + \frac{(1-\xi^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{n(1+\xi^2)\sqrt{1-\eta_0^2}}\right] U_1 -$$

$$-\frac{3\xi^3+2\xi^2\eta_0^2+\xi}{n\sqrt{(1-\eta_0^2)(\xi^2+\eta_0^2)}} \varphi_1 - \frac{(1+\xi^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{n\sqrt{1-\eta_0^2}} \frac{d\varphi_1}{d\xi}.$$

По смената на овој израз и (72) во (69) и по упростувањето, ќе се добие:

$$(1+\xi^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2} \frac{d^2U_1}{d\xi^2} + 2\xi\sqrt{\xi^2+\eta_0^2} \frac{dU_1}{d\xi} -$$

$$-\frac{(2\xi^2+1+n^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}{1+\xi^2} U_1 = f_1 n\sqrt{1-\eta_0^2} + 3\xi\varphi_1\sqrt{\xi^2+\eta_0^2} +$$

$$+(1+\xi^2)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2} \frac{d\varphi_1}{d\xi}.$$

или

$$(72)\qquad (1+\xi^2)^2\,\frac{d^2U_1}{d\xi^2}+2\xi(1+\xi^2)\,\frac{dU_1}{d\xi}-(2\xi^2+1+n^2)\,U_1=$$

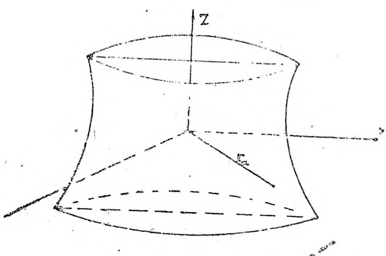
$$=f_1\,\frac{n(1+\xi^2)\sqrt{1-\eta_0{}^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta_0{}^2}}+3\xi(1+\xi^2)\,\varphi_1+(1+\xi^2)^2\,\frac{d\varphi_1}{d\xi}.$$

Хомогениот дел од горната диференцијална равенка е од облик:

$$(73)\qquad f(\xi)\,U_1''+\frac{1}{2}\,f'(\xi)\,U_1'+g(\xi)\,U_1=0,$$

каде што е:

$$(73a)\qquad f(\xi)=(1+\xi^2)^2 \text{ и } g(\xi)=-(2\xi^2+1+n^2).$$



Сл. 13

За $f(\xi)>0$, што во нашиов случај е (пошто за секое ξ е $f(\xi)>0$), диференцијалната равенка (73) може со смените:

$$(74)\qquad t=\int\frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} \text{ и } U_1(\xi)=V(t),$$

да се донесе во облик:

$$(75)\qquad V''+g(\xi)\,V=0,$$

каде треба ξ да се замени од односот (74). Во нашиов случај ќе биде:

$$t=\int\frac{d\xi}{1+\xi^2}=\operatorname{arctg}\xi,$$

т. е.

$$\xi = \operatorname{tg} t. \tag{76}$$

За $g(\xi)$ ќе добијеме:

$$g(\xi) = -(2 \operatorname{tg}^2 t + 1 + n^2),$$

и (75) ќе изгледа:

$$V'' - (2 \operatorname{tg}^2 t + 1 + n^2) V = 0,$$

или

$$V'' \cos^2 t - [2 + (n^2 - 1) \cos^2 t] V = 0. \tag{77}$$

Тури ли се

$$p = n^2 - 1,$$

тогаш е општиот интеграл на равенката (77):

$$V = \cos t \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\cos t} \frac{d}{dt} \left(C_1 e^{t\sqrt{p}} + C_2 e^{-t\sqrt{p}} \right) \right]. \tag{78}$$

По извршеното диференцирање во (78) ќе се добие:

$$V = C_1 e^{t\sqrt{p}} (\sqrt{p} + \operatorname{tg} t) \sqrt{p} - C_2 e^{-t\sqrt{p}} (-\sqrt{p} + \operatorname{tg} t) \sqrt{p}. \tag{79}$$

Со помошта на (72) ќе добијеме:

$$U_1 = C_1 e^{\sqrt{p} \operatorname{arctg} \xi} (\sqrt{p} + \xi) \sqrt{p} - C_2 e^{-\sqrt{p} \operatorname{arctg} \xi} (\sqrt{p} - \xi) \sqrt{p}. \tag{80}$$

Пошто нас не интересува општиот интеграл на диференцијалната равенка (72) што има самостален член;

$$W(\xi) = f_1 \frac{n(1+\xi^2)\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}} + 3\xi(1+\xi^2)\varphi_1 + (1+\xi^2)\frac{d\varphi_1}{d\xi}, \tag{81}$$

тогаш константите C_1 и C_2 во (80) ќе ги определиме по Lagrange. Ако сложиме:

$$\begin{aligned} J_1 &= e^{\sqrt{p} \operatorname{arctg} \xi} (\sqrt{p} + \xi) \sqrt{p}, \\ J_2 &= e^{-\sqrt{p} \operatorname{arctg} \xi} (\sqrt{p} - \xi) \sqrt{p}, \end{aligned} \tag{82}$$

тогаш се добива за C_1 и C_2:

$$C_1 = \int \frac{-J_2\, W(\xi)\, d\xi}{J_1 J_2' - J_2 J_1'} + A\,,$$

$$C_2 = \int \frac{J_1\, W(\xi)\, d\xi}{J_1 J_2' - J_2 J_1'} + B\,,$$

каде што се A и B адитивни константи со кои ќе располагаме така што да бидат задоволени условите на краиштата.

Со обзир на (76) се има:

$$J_1' = \sqrt{p}\, \frac{\xi^2 + \sqrt{p}\,\xi + 1 + p}{1+\xi^2}\, e^{\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}\,,$$

$$J_2' = -\sqrt{p}\, \frac{\xi^2 - \sqrt{p}\,\xi + 1 + p}{1+\xi^2}\, e^{-\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}\,,$$

и именителот од подинтегралните функции ќе биде:

$$J_1 J_1' - J_2 J_1' = -\frac{2p}{1+\xi^2}\sqrt{p}\,(1+p),$$

т. е.

$$C_1 = \frac{1}{2p(1+p)} \int (1+\xi^2)(\sqrt{p}-\xi)\, W(\xi)\, e^{-\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}\, d\xi + A\,,$$

$$C_2 = -\frac{1}{2p(1+p)} \int (1+\xi^2)(\sqrt{p}+\xi)\, W(\xi)\, e^{\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}\, d\xi + B\,,$$

и, со овие вредности, општиот интеграл од (71) ќе биде:

$$U_1 = \frac{\sqrt{p}+\xi}{2\sqrt{p}\,(1+p)}\, e^{\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}\,\cdot \tag{83}$$

$$\cdot \int (1+\xi^2)(\sqrt{p}-\xi)\, W(\xi)\, e^{-\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}\, d\xi +$$

$$+ \frac{\sqrt{p}-\xi}{2\sqrt{p}\,(1+p)}\, e^{-\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi} \int (1+\xi^2)(\sqrt{p}+\xi)\, W(\xi)\, e^{\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}\, d\xi$$

$$+ A e^{\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}(\sqrt{p}+\xi)\sqrt{p} + B e^{-\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}(\sqrt{p}-\xi)\sqrt{p}\,.$$

Кога е познато U_1, со обична диференцијација од (71) може да се определи U_2.

Знаејќи ги U_1 и U_2 од (68) може да се најдат:

$$N_{\alpha\beta n} = \frac{U_1}{r_\alpha}, \tag{84}$$

$$N_{\beta n} = \frac{1-\eta_0^2}{r_\alpha (\xi^2+\eta_0^2)} U_2,$$

а од (41а) со обзир на (84):

$$N_{\alpha n} = \frac{R_\beta \cos\alpha (1-\eta_0^2)}{r_\alpha^2 (\xi^2+\eta_0^2)} U_2 - R_\beta Z_n. \tag{85}$$

Во општите интеграли (84) и (85) треба $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$ да бидат изразени во функција или од α или од ξ; во нив има две интеграциони константи A и B, што требе да бидат определени од некои дадени почетни услови.

Да видиме сега како ќе ја извршиме интеграцијата на интегралите:

$$I_1 = \int (1+\xi^2)(\sqrt{p}-\xi)\, W(\xi)\, e^{-\sqrt{p}\,\operatorname{arctg}\xi}\, d\xi,$$

$$I_2 = \int (1+\xi^2)(\sqrt{p}+\xi)\, W(\xi)\, e^{\sqrt{p}\,\operatorname{arctg}\xi}\, d\xi,$$

што се јавуват во (83). Да ја најдеме прво $W(\xi)$ во функција од ξ. Од (81):

$$W(\xi) = f_1 \frac{n(1+\xi^2)\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}} + 3\xi(1+\xi^2)\varphi_1 + (1+\xi^2)\frac{d\varphi_1}{d\xi}, \tag{81}$$

а со оглед на:

$$f_1 = f(\alpha)\frac{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}}, \tag{82}$$

$$\varphi_1 = f(\alpha)\frac{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}}, \tag{83}$$

при:

(60) $$f(\alpha) = -Y_n r_\alpha R_\beta - \frac{d}{d\alpha}(Z_n r_\alpha R_\beta),$$

(61) $$\varphi(\alpha) = X_n r_\alpha R_\beta,$$

ќе се добие:

(84) $$W(\xi) = \left[-Y_n r_\alpha R_\beta - \frac{d}{d\alpha}(Z_n r_\alpha R_\beta)\right]\frac{n\eta_0(1-\eta_0{}^2\sqrt{1+\xi^2}}{(\xi^2+\eta_0{}^2)^{3/2}} +$$
$$+\frac{3\xi\eta_0\sqrt{1-\eta_0{}^2}\sqrt{1+\xi^2}}{\xi^2+\eta_0{}^2}\left[-Y_n r_\alpha R_\beta - \frac{d}{d\alpha}(Z_n r_\alpha R_\beta)\right]+$$
$$+(1+\xi^2)\frac{d}{d\xi}\left\{\left[-Y_n r_\alpha R_\beta - \frac{d}{d\alpha}(Z_n r_\alpha R_\beta)\right]\cdot\frac{\eta_0\sqrt{1-\eta_0{}^2}}{(\xi^2+\eta_0{}^2)\sqrt{1+\xi^2}}\right.\cdot$$

Насекаде во (84) треба сите големини да бидат изразени во функција од ξ и тоа со помошта на трансформациите (49) до (57). Заменувајќи ја така најдената функција во I_1 и I_2 подинтегралната функција ќе биде така комплицирана што интеграцијата ќе биде невозможна. Но ние можеме подинтегралната функција да ја замениме со една парабола од степен поголем отколку е степенот на подинтегралната функција. Оваа парабола ќе ја добиеме така што коефициентите $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots a_n$ да бидат определени по методот на најмалите квадрати. Ако со $F(\xi)$ се обележи подинтегралната функција, тогаш коефициентите a_i $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ треба да се израчунат од системата:

(85)
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}(a_0+a_1\xi+\cdots+a_i\xi^i+\cdots+a_n\xi^n)\,d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2}F(\xi)\,d\xi,$$
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}(a_0+a_1\xi+\cdots+a_i\xi^i+\cdots+a_n\xi^n)\,\xi\,d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\xi F(\xi)\,d\xi,$$
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}(a_0+a_1\xi+\cdots+a_i\xi^i+\cdots+a_n\xi^n)\,\xi^i\,d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\xi^i F(\xi)\,d\xi,$$
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}(a_0+a_1\xi+\cdots+a_i\xi^i+\cdots+a_n\xi^n)\,\xi^n\,d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\xi^n F(\xi)\,d\xi,$$

каде ξ_1 и ξ_2 се двете вредности во кои варира ξ за дадениот случај. Интегралите од десните страни на системата на $(n+1)$ равенки (85) можат да бидат израчунати по Simson или некако инаку. Ако се има система со повеќе равенки од три, за да се израчунат константите a_i $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ најдобро е да се примени Gausoviot алгоритам, што е за техничките проблеми веќе и влезено во пракса и дава резултати, ако бројот n не е многу голем, употребљиви и доста точни. Да напомениме дека ξ варира за практично применливите случаи меѓу 0 и 2—3, тогаш интегралите од десните страни можат да бидат лесно израчунати. Бидејќи ξ може да варира во интервалот:

$$0 \leqq \xi \leqq \infty,$$

то, од

$$\xi = \sqrt{\frac{r_\alpha^2}{a^2} - 1}, \tag{86}$$

ако хиперболоидот оди на двете страни r_α, треба да се земе интеграција:

$$\int_0^{\xi_1} + \int_0^{\xi_2}.$$

Во специјален случај на периодичен товар само по z, т. е. кога се $Y_n=0$ и $X_n=0$ а $Z_n=kf(\alpha)$, каде што е k функција само од β, се добива од (60) и (61)

$$f(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}(Z_n r_\alpha R_\beta), \tag{87}$$

$$\varphi(\alpha)=0.$$

За случај за товар даден по законот

$$Z_n = p\beta_w \sin^2\alpha, \tag{88}$$

каде е

$$\beta_w = \beta_w(\beta), \tag{89}$$

се добива со оглед на (10) и (11):

$$Z_n r_\alpha R_\beta = p\beta_w \frac{a^4 b^2 \sin^2\alpha \cos\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^2},$$

и за (87) се добива; по сведувањето:

$$f(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha}\left[p\beta_w \frac{a^4 b^2 \sin^2\alpha \cos\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^2}\right] =$$

$$= p\beta_w a^4 b^2 \frac{\sin\alpha\,[a^2\cos^4\alpha + a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^4\alpha]}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^3}.$$

Земајќи в обзир дека е $\eta_0 = \dfrac{b}{e}$ и односите (53) и (54) се добива:

$$f(\alpha) = -p\beta_w a^6 b^2 e^2 \frac{\sin\alpha\,(e^2\xi^2 - b^2)\,[2^2 e\,\xi^4 + (3b^2 + e^2)\,\xi^2 + 2b^2]}{(b^2 + e^2\xi^2)^3}.$$

Со горната вредност и по упростувањето:

$$(89)\qquad W(\xi) = -\frac{np\beta_w a^9}{b}\,\xi\,\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{e\,\xi^2 + b^2}\,\frac{2e^2\xi^4 + (3b^2 + e^2)\,\xi^2 + 2b^2}{(b^2 + e^2\xi^2)^3}.$$

Од (89) а со обзир на J_1 и J_2 се гледа дека подинтегралната функција би била од степен I или II или III во зависност од това, која приближност ќе биде земена за $e^{\sqrt{p}\,\mathrm{arctg}\,\xi}$. Тоа покажува дека апроксимацијата во системата (85) може да се ограничи на три до четири члена.

Ако има да се испитува само случајот на потпирањето, тогаш во $W(\xi)$ ќе се појави само Y_n како функција од α и, поради воведените трансформации, од ξ. Това настапува од причини, што потпорите на хиперболичната лушпа се така уредени да дејствуваат по правецот на тангентата од хиперболата.

Peter R. Serafimow

SPANNUNGSZUSTAND HYPERBOLISCHER SCHALEN NACH DER MEMBRANTHEORIE

(Zusammenfassung)

(Größter Teil dieser Arbeit ist aus der Dissertation des Verfassers, welche er im Jahre 1947 an der Technischen Hochschule zu Dresden bei Prof. Dr.-Ing. K. Beyer und Prof. Dr.-phil. F. Willers abgelegt hat).

Die Festigkeit der Hyperbelschalen kann, wie die Erfahrung gelehrt hat, nach dem Membranzustand beurteilt werden. Oberer Rand ist kräftefrei, so, daß dort mit $N_\alpha = 0$ und $N_\beta = 0$ Randbedingungen vorgeschrieben sind. Die Stützung am unteren Rand soll so beschaffen sein, daß die, in diesem Bereich auftretenden Spannungen der Formänderung der Abstützung zugeordnet sind. Diese Bedingungen werden selbst dann, wenn sie nicht zutreffen, als vorhanden angenommen. Die an der Schale angreifenden Kräfte sind unabhängig von ihrer physikalischen Bedeutung, stetig über dem Mantel ve teilt, so, daß der Spannungs — und Verschiebungszustand stetig ist, und daher zunächst an einem Differentialabschnitt festgestellt werden kann (Abb. 2). Auf den Abbildungen (3), (4), (5), (6) und (7) sind die auf den Diffe entialabschnitt eingreifenden nneren und äußeren Kräfte in Richtungen: a) der Tangente der Hyperbel
b) „ „ des Breitenkreises
c) der Normale der Hyperbel
projeziert. Dabei kommt man zu den folgenden drei simultanen partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} R_\beta - \frac{\partial (N_\alpha r_\alpha)}{\partial \alpha} + N_\beta R_\beta \sin\alpha + p_y r_\alpha R_\beta = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} - \frac{\partial (N_{\alpha\beta} r_\alpha)}{\partial \alpha} - N_{\beta\alpha} R_\beta \cdot r_\alpha \sin\alpha + p_x r_\alpha R_\beta = 0,$$

$$N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\alpha r_\alpha + p_z r_\alpha R_\beta = 0.$$

Eine virtuelle Drehung des Elementes (Abb. 2) um die z Achse gibt, wenn man die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigt, das Resultat (3). Das heißt, die Scherspannungen für die Richtungen, die wir gewählt haben, verhalten sich wie bei dem ebenen Spannungszustand.

Vier rotationssymetrische Belastungen N_β und $N_{\alpha\beta}$ sind von β unabhängig (4). In diesem Falle geht das System von den partiellen Differentialgleichungen (2) in:

$$-\frac{d (N_\alpha r_\alpha)}{d\alpha} + N_\beta R_\beta \sin\alpha + p_y r_\alpha R_\beta = 0,$$

$$(5) \qquad -\frac{d (N_{\alpha\beta} r_\alpha)}{d\alpha} - N_{\alpha\beta} R_\beta \sin\alpha + p_x r_\alpha R_\beta = 0,$$

$$N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\alpha r_\alpha + p_z r_\alpha R_\beta = 0.$$

über

Also, gelangt man für die rotationssymetrischen Belastungen zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (5). Mit Hilfe der Abb. 8 und den Beziehungen: (6), (7), (8), (9), (10), (11) und (12) sind die geometrischen Eigenschaften der Hyperbel bezw. Rotationshyperboloid bestimmt.

Spannungszustand für p=konst.

Die Belastungskomponenten sind durch (15) bestimmt. Mit (15) und obengenannten Beziehungen geht das Gleichungssystem (5) in:

$$\text{(16)}\qquad \begin{aligned} &-r_\alpha \frac{dN_\alpha}{d\alpha} - N_\alpha \frac{dr_\alpha}{d\alpha} + R_\beta N_\beta \sin\alpha + p_y r_\alpha R_\beta \cos\alpha = 0, \\ &-r_\alpha \frac{dN_{\alpha\beta}}{d\alpha} - N_{\alpha\beta} \frac{dr_\alpha}{d\alpha} - N_{\alpha\beta} R_\beta \sin\alpha = 0, \\ &N_\beta R_\beta \cos\alpha - N_\alpha r_\alpha - p_z r_\alpha R_\beta \sin\alpha = 0 \end{aligned}$$

über.

Mit (17), (10) und (13) geht das obige System in:

$$\text{(19)}\qquad \frac{dN_\alpha}{d\alpha} + N_\alpha \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{b^2}{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha} - 1 \right) - \frac{p\,a^2 b^2}{\cos\alpha\,(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{3/2}} = 0$$

über,

d. h. man gelangt zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, in der die unbekannte Funktion N_α ist. Die allgemeine Lösung ist:

$$\text{(21)}\qquad N_\alpha = \frac{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}{\cos^2\alpha} \left[C + \frac{pb^2}{4a\sqrt{a^2+b^2}} \ln \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha}{a-\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha} + \frac{pb^2\sin\alpha}{2\,[a^2-(a^2+b^2)\sin^2\alpha]} \right].$$

Aus (17) bekommt man:

$$\text{(22)}\qquad N_\beta = \frac{a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha}{b^2} N_\alpha + \frac{pa^2\sin\alpha}{(a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha)^{1/2}}.$$

Die Kräfte $N_{\alpha\beta}$ kann man aus der zweiten Differentialgleichung des Systems (5) ermitteln. Die Lösung ist in (24) enthalten.

Die Integrationsconstante C kann aus den Randbedingungen $\alpha=\alpha_0$, $N_\alpha=0$ für den oberen Rand aus (21) ermittelt werden (24a). Damit sind N_α und N_β durch (25) und (25a) eindeutig ermittelt worden. Die Diskussion dieser Ergebnisse, wenn man $a \to bi$, $\alpha \to -(90-x)$ nimmt, zeigt, daß das Rotationshyperboloid in eine offene Kuppel übergeht und N_α und N_β mit den Formeln für dieselbe übereinstimmen (s. K. Beyer, Statik im Stahlbetonbau 2 Aufl. S. 751, Formel (1118)).

Die konstante Belastung Pt/m auf dem oberen Rande.

Für diesen Belastungsfall ist $p_x = p_y = p_z = 0$ und das Gleichungssystem (5) geht in (31) über. Die Ergebnisse der Integration mit den gegebenen Randbedingungen führen zu (33a) und (34a).

Die Diskussion derselben führt zu denselben Resultat wie früher.

Periodische Belastung.

Hier ist eigentlich der Kern der Dissertation. Mit (36) und (37) gehen die Partialdifferentialgleichungen (2) in das System:

$$R_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum N_{\alpha\beta n}\sin n\beta\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(r_\alpha \sum N_{\alpha n}\cos n\beta\right) +$$

$$(38) \qquad + R_\beta \sin\alpha \sum N_{\beta n}\cos n\beta = -r_\alpha R_\beta \sum Y_n \cos n\beta,$$

$$R_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum N_{\beta n}\cos n\beta\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(r_\alpha \sum N_{\alpha\beta n}\sin n\beta\right) -$$

$$- R_\beta \sin\alpha \sum N_{\alpha\beta n}\sin n\beta = -r_\alpha R_\beta \sum X_n \sin n\beta,$$

$$R_\beta \cos\alpha \sum N_{\beta n}\cos n\beta - r_\alpha \sum N_{\alpha n}\cos n\beta = -r_\alpha R_\beta \sum Z_n \cos n\beta.$$

über.

Die ausgeführten Differentiationen unter der Annahme, daß $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$, X_n, Y_n, Z_n Funktionen nur von α sind, führen zu den Gleichungen (39), (40) und (41).

Wenn man zwei unbekannte Funktionen ausschließt, gelingt man zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Hill'schen Typ. Ihr Integral ist theoretisch gegeben, aber für unsere Zwecke nicht anwendbar. Um geschlossene Lösungen für $N_{\alpha n}$, $N_{\beta n}$, $N_{\alpha\beta n}$ zu bekommen, führen wir neue Koordinaten ein, und zwar die elyptischen Koordinaten:

$$(44) \qquad \begin{aligned} x &= c\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\cos\beta, \\ y &= c\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\sin\beta, \\ z &= c\,\xi\eta. \end{aligned}$$

Für das Rotationshyperboloid ist $\eta = \eta_0 = b/c$, $a = c\sqrt{1-\eta_0^2}$. Damit ist die Gleichung der Hyperbel durch (47) gegeben. Wenn alle geometrischen Größen der Hyperbel mit (48), (49), (50), (51), (52), (53), (54), (55), (56) in Funktionen von ξ dargestellt werden, können die Differentialgleichungen (44), mit zuhilfenahme (57) in

$$(58) \qquad n\frac{c(\xi^2+\eta_0^2)^{3/2}}{\sqrt{1-\eta_0^2}} N_{\alpha\beta n} + \frac{d}{d\xi}\left(N_{\beta n} r_\alpha \frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta_0^2}\right)\cdot \frac{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}}{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}$$
$$- \frac{c}{\eta_0}\,\xi(\xi^2+\eta_0^2)N_{\beta n} = f(\alpha),$$

$$(59)\qquad -n\,\frac{c\,(\xi^2-\eta_0^2)^{3/2}}{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}\,N_{\beta n}+\frac{d}{d\xi}\left(r_\alpha\, N_{\alpha\beta n}\,.\,\frac{(\xi^2+\eta_0^2)\sqrt{1+\xi^2}}{\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}}\right)=$$

$$=\frac{c}{\eta_0}\,\xi\,(\xi^2+\eta_0^2)\,N_{\alpha\,n}=\varphi\,(\alpha),$$

übergehen, wo veränderliches ξ ist und $f(\alpha)$ nnd $\varphi(\alpha)$ du ch (60) und (61) bestimmt sind, und später vom veränderlichen ξ dargestellt werden. Die Gleichungen (58) und (59) können einfacher mit (58a) und (59a) geschrieben werden.

Um dieses System von zwei Differentialgleichungen, wo die unbekannten Funktionen $N_{\beta n}$ und $N_{\alpha\beta n}$ sind, zu lösen, gruppieren wir die Koefizienten bei unbekannten Funktionen so, wie das in (62), (63), (64) und (65) gemacht worden ist. So sind wir zu den Gleichungen (66) und (67) gekommen, wobei f_1 und φ_1 die rechten Seiten von (58a) und (59a) sind.

Statt unsere unbekannten Funktionen $N_{\alpha n}$ und $N_{\alpha\beta n}$ führen wir neue gemäß:

$$(68)\qquad \begin{aligned} U_1&=r_\alpha\, N_{\alpha\beta n}\,,\\ U_2&=r_\alpha\,\frac{\xi^2+\eta_0^2}{1-\eta^2}\,N_{\beta n}\,. \end{aligned}$$

Mit diesen gelangt man zu den Differentialgleichungen (69) und (70). Durch die Elimination von U_1 gemäß (71) und den nötigen Umformungen gelangt man zu:

$$(72)\qquad (1+\xi^2)^2\,\frac{d^2U_1}{d\xi^2}+2\,\xi\,(1+\xi^2)\,\frac{dU_1}{d\xi}-(2\,\xi^2+1+n^2)\,U_1=$$

$$=f_1\,\frac{n\,(1+\xi^2)\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}+3\,\xi\,(1+\xi^2)\,\varphi_1+(1+\xi^2)^2\,\frac{d\varphi_1}{d\xi}\,.$$

Homogener Teil dieser Differentialgleichung ist von der Form:

$$(73)\qquad f(\xi)\,U_1''+\frac{1}{2}\,f'(\xi)\,U_1'+g(\xi)\,U_1=0,$$

wobei $f(\xi)$ und $g(\xi)$ durch (73a) gegeben sind. Für $f(\xi)>0$, was bei uns der Fall ist, kann man (73) durch (74) in die Form

$$(75)\qquad V''+g(\xi)\,V=0,$$

bringen, wobei noch ξ aus (47) zu ersetzen ist. In unserem Falle ist das mit (76) gemacht worden. Mit diesen Transformationen ist homogener Teil unserer Differentialgleichung zweiter Ordnung in (77) übergeführt worden. Nach Koppenfels ist das allgemeine Integral dieser Gleichung durch (78) bestimmt. Durch (72) kann man U_1 in die Form (80) bringen.

Das Störungsglied in der Differentialgleichung (68):

$$w(\xi)=f_1\frac{n(1+\xi^2)\sqrt{1-\eta_0^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta_0^2}}+3\xi(1+\xi^2)\varphi_1+(1+\xi^2)\frac{d\varphi_1}{d\xi},\tag{81}$$

soll bei der Ermittlung von dem allgemeinen Integral in Betracht genommen werden. Um das zu erzielen, werden wir die Lagrange'sche Methode der Variation der Constanten anwenden. So gelangt man zu der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}U_1=&\frac{\sqrt{p}+\xi}{2\sqrt{p}(1+p)}e^{\sqrt{p}\operatorname{arctg}\xi}\int(1+\xi^2)(\sqrt{p}-\xi)\,W(\xi)\,e^{-\sqrt{p}\operatorname{arctg}\xi}\,d\xi\\ &+\frac{\sqrt{p}-\xi}{2\sqrt{p}(1+p)}e^{-\sqrt{p}\operatorname{arctg}\xi}\int(1+\xi^2)(\sqrt{p}+\xi)\,W(\xi)\,e^{\sqrt{p}\operatorname{arctg}\xi}\,d\xi\\ &+Ae^{\sqrt{p}\operatorname{arctg}\xi}(\sqrt{p}+\xi)\sqrt{p}-Be^{-\sqrt{p}\operatorname{arctg}\xi}(\sqrt{p}-\xi)\sqrt{p},\end{aligned}\tag{83}$$

wobei AB Integrationsconstanten sind.

Die übliche Differentation aus (71) liefert U_2. Wenn U_1 und U_2 bekannt sind, geben die Beziehungen (68) und (41a) die gesuchten Größen N_α, $N_{\beta n}$ und $N_{\alpha\beta n}$. In diesen allgemeinen Lösungen tritt entweder ξ oder α aûf. Um die Integrationsconstanten A und B zu bestimmen, müssen wir die Randbedingungen berücksichtigen, und zwar an den oberen Rand, wo sie eindeutig bestimm sind. Bei der Integration der auftretenden Integrale stoßen wir auf große Schwierigkeiten. Um dies zu beseitigen, werden die Funktionen unter den Integralen durch Parabeln n-ten Grades ersetzt und zwar können die Koefizienten dieser Parabeln nach der Methode der kleinsten Qûadrate bestimmt werden, was in (58) formell gegeben ist. Die Integrale von rechten Seiten in (58) können nach Simpson'scher Regel ausgewertet werden. Und das geschieht, *da* ξ kleine Werte hat, ziemlich schnell. In (89) ist $w(\xi)$ für die Windbelastung nach einem quadratischen Gesetz von α in der Funktion von ξ dargestellt.

LITERATUR

1. K. Beyer
Die Statik im Eisenbetonbau, zweite Auflage, Berlin 1932.

2. M. Flügge
Statik und Dynamik der Schalen.

3. E. Kamke
Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, B. 1 III Auflage, Leipzig 1944.

4. Handbuch für Eisenbetonbau, IV Auflage, Bd. IV. von Fr. Dischinger: Schalen, Berlin 1928.

5. Darboux
Théorie des surfaces II Paris.

6. W. V. Koppenfels
Math. Annalen, 1936 strana 112.

7. W. Magnus
F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1943.

8. Handbuch der Physik, Bd. VI, die Aufsätze von Trefftz und Geckeler.